チャレンジしよう日食計算 (4)

山　本　威一郎

17. 皆既帯限界線の求め方（原理）

皆既帯の限界線は、本影錐が地球の表面を移動してゆくときの包絡線に相当するわけで、このうち北側を通るものを北限界線、南側を通るものを南限界線と呼んでいます。

本シリーズ(1)にも説明しましたが、任意の時刻 t において、ζ 面上の月影と観測者との間には、次の式が成り立ちます。（ここでは、Qの符号を逆にとった）

$$Q=\left\{(\chi-\xi)^2+(y-\eta)^2\right\}-(\ell_2-\tan f_2)^2$$

一般に皆既帯限界線は本影の円錐上にあり、かつ、時間経過に対して円錐内には入り込まないので、Qの極値が0になる点と見なせます。即ち

$$Q=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\frac{dQ}{dt}=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

一方、　$\chi-\xi=m\ \sin q$　, $y-\eta=m\ \cos q$ でしたから、①、②へ代入して整理すると次式を得ます。

$$\left(\frac{d\chi}{dt}-\frac{d\xi}{dt}\right)\sin q+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt}\right)\cos q-\left(\frac{d\ell_2}{dt}-\frac{d\zeta}{dt}\tan f_2\right)=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

ただし、$\tan f_2$ の時間変化は無視します。

この③式が、皆既帯限界線の基礎方程式となります。

18. 皆既帯限界線の求め方（解き方）

任意の時刻 t を与えて、皆既帯限界線（一時刻に対しては限界点）の λ、φ を求めるのに、③式をもう少し変形してみます。

一般に観測者の位置は次式で与えられます。（前号の15項を参照）

$$\xi=\rho\cos\varphi'\sin(\mu+\lambda) \quad \cdots\cdots \text{④}$$

$$\eta=\rho\sin\varphi'\cos d-\rho\cos\varphi'\sin d\cos(\mu+\lambda) \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

$$\zeta=\rho\sin\varphi'\sin d+\rho\cos\varphi'\cos d\cos(\mu+\lambda) \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

これらの時間的変化は次式で与えられます。

$$\frac{d\xi}{dt}=\left[-y\sin d+\zeta\cos d+(\ell_2-\zeta\tan f_2)\sin d\cos q\right]\frac{d\mu}{dt} \quad \cdots\cdots \text{⑦}$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\left[\chi\sin d-(\ell_2-\zeta\tan f_2)\sin d\sin q\right]\frac{d\mu}{dt}-\frac{dd}{dt}\cdot\zeta \quad \cdots\cdots \text{⑧}$$

$$\frac{d\zeta}{dt}=\left[-\chi\cos d+(\ell_2-\zeta\tan f_2)\cos d\sin q\right]\frac{d\mu}{dt}+\left[y-(\ell_2-\zeta\tan f_2)\cos q\frac{dd}{dt}\right] \quad \cdots\cdots \text{⑨}$$

⑦、⑧、⑨を③へ代入し、微小項を無視すると、次の様な式にまとめることが出来ます。

$$P = a - b\cos q + c\sin q - \zeta\left(\cos d\ \sin q\cdot\frac{d\mu}{at} - \cos q\cdot\frac{dd}{dt}\right) \cdots\cdots ⑩$$

ここで、$a = -\frac{d\ell 2}{dt} - \chi\tan f2\cdot\cos d\cdot\frac{d\mu}{dt} + y\cdot\tan f2\cdot\frac{dd}{dt}$

$b = -\frac{dy}{dt} + \chi\sin d\cdot\frac{d\mu}{dt}$

$c = -\frac{d\chi}{dt} + y\cdot\sin d\cdot\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\ell 2}{dt}\cdot\tan f2\cdot\cos d\cdot\frac{d\mu}{dt}$

これらは全て一意的に計算可能な定数です。

ここで、$\sin q$, $\cos q$, ζ が未知数となりますが、q の値を漸近法によって求めます。

⑩式で P=O とおき、

$$\tan q = \left(b - \zeta\frac{dd}{dt} - \frac{a}{\cos q}\right) \Big/ \left(c - \zeta\cdot\cos d\cdot\frac{d\mu}{dt}\right) \cdots\cdots ⑪$$

時刻 t における ζ は、中心食線上の λ、φ から、一方、q =O をそれぞれ初期値とし、⑪から q を求める。

次に、下式を用いて、限界線上の観測者の位置（ ξ , η , ζ ）を求める。

$$\xi = \chi - (\ell_2 - \zeta\tan f_2)\sin q \cdots\cdots ⑫$$

$$\eta_1 = y_1 - (\ell_2 - \zeta\tan f_2)\cos q / \rho_1 \text{ ㊟} \cdots\cdots ⑬$$

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta_1^2} \cdots\cdots ⑭$$

$$\zeta = 0.9966325\cdot\zeta_1/\rho_1 - 0.0067236\cdot\sin d\cdot\cos d\cdot\eta_1/\rho_1 \cdots ⑮$$

ここで得られた ζ と、先に求めた q を⑪へ代入して、ζ が 10^{-6} で収束したら止め、⑩へ代入して検算を行う。この様にして得た ξ , η_1, ζ_1 から λ , φ を求めるには、前号と同様な手法によります。

$$\tan(\mu + \lambda) = \frac{\xi}{-\eta_1\sin d_1 + \zeta_1\cos d_1}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{\sin(\mu + \lambda)\{-\eta_1\sin d_1 + \zeta_1\cos d_1\}}{\xi}$$

$$\tan\varphi = \frac{\tan\varphi_1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

皆既日食の時は、q が北限界線、q + 180°として求めたものが南限界線となりますが、金環日食では反対になります。

㊟ ここでの $y_1 = y / \sqrt{\sin^2 d + (1 - e^2)\cos^2 d}$ を示す。